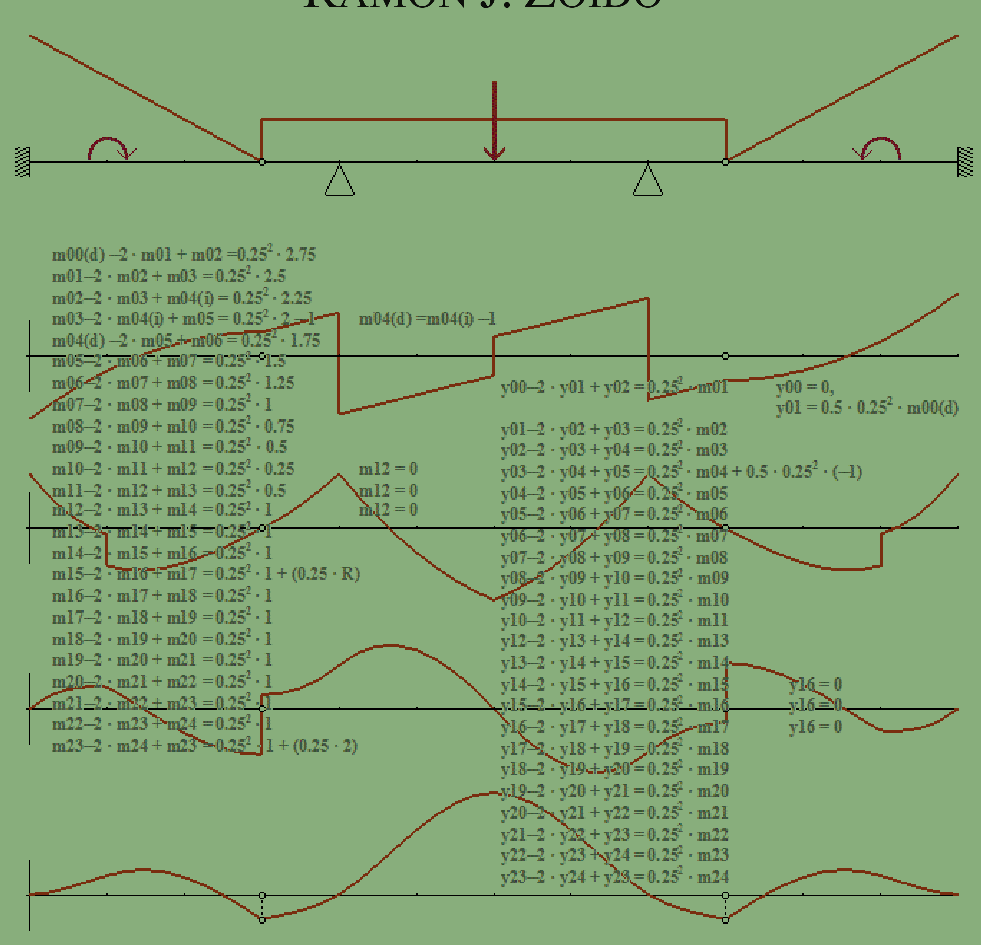
# MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS APLICADOS AL ANÁLISIS DE LA FLEXIÓN SIMPLE EN VIGAS RECTAS DE RIGIDEZ CONSTANTE (I)

*por*


PEDRO GALÁN DEL SASTRE

RAMÓN J. ZOIDO



**CUADERNOS**

**DEL INSTITUTO**

**JUAN DE HERRERA**

**DE LA *ESCUELA DE***

***ARQUITECTURA***

***DE MADRID***

**3-53-07**

# MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS APLICADOS AL ANÁLISIS DE LA FLEXIÓN SIMPLE EN VIGAS RECTAS DE RIGIDEZ CONSTANTE (I)

*por*

PEDRO GALÁN DEL SASTRE
RAMÓN J. ZOIDO

**CUADERNOS**
**DEL INSTITUTO**
**JUAN DE HERRERA**
**DE LA *ESCUELA DE***
***ARQUITECTURA***
***DE MADRID***

**3-53-07**

C U A D E R N O S

D E L  I N S T I T U T O

J U A N  D E  H E R R E R A

**NUMERACIÓN**

2 Área

51 Autor

09 Ordinal de cuaderno (del autor)

**TEMAS**

1 ESTRUCTURAS

2 CONSTRUCCIÓN

3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS

4 TEORÍA

5 GEOMETRÍA Y DIBUJO

6 PROYECTOS

7 URBANISMO

8 RESTAURACIÓN

0 VARIOS

***Métodos en diferencias finitas aplicados al análisis de la flexión simple en vigas rectas de rigidez constante (I).***



Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 419.01 / 3-53-07
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-492-9
ISBN-13: 978-84-9728-493-6
Depósito Legal: M-17381-2014

*El problema del análisis de la flexión simple en piezas rectas de sección constante con ciertas hipótesis complementarias y otras condiciones de forma y solicitación nos conduce a un modelo regido por una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes con condiciones de contorno que puede ser reducido a un problema unidimensional definido en un intervalo. Este problema es, como se sabe, fundamental en el campo de la edificación por el predominio de estas piezas en arquitectura e ingeniería. La presencia de cargas y momentos puntuales en las solicitaciones de vigas es imprescindible para completar un modelo operativo ya que permite ampliar substancialmente el campo del análisis a vigas de varios tramos y otros problemas de interés en el contexto estructural. Pero esta presencia nos impide efectuar holgadamente integraciones "convencionales" con lo que se necesita acudir a otros procedimientos matemáticos entre los que se encuentran los métodos numéricos.*

*El método de integración por diferencias finitas es un método numérico universal y extraordinariamente eficaz que resulta una solución idónea por su simplicidad y adaptabilidad a cualquier tipo de planteamientos en este ámbito. El sistema de ecuaciones al que conduce la resolución de los problemas puede hoy día ser resuelto con gran facilidad por la mayor parte de calculadoras ordinarias y programas informáticos.*

*Después de una exposición del procedimiento con carácter general descrito sobre los casos más simples para ecuaciones de 2º y 4º orden, se ha procedido a configurar unas fórmulas de uso sistemático totalmente adaptadas a las condiciones del problema de la flexión simple en lo que hemos denominado "métodos en dos etapas" partiendo de la caracterización de las condiciones de conjugación de la unión rígida, el tratamiento de las secciones extremas y, en su caso, de la unión articulada. Con esta descripción pormenorizada puede ya procederse reiteradamente sobre las piezas de uno o varios tramos sean cuales sean sus vinculaciones de extremo. Se ha dado la mayor importancia a los ejercicios prácticos que son los que permiten comprender la metodología operativa y obtener los resultados buscados en los distintos casos comparando sus soluciones con las obtenidas por otros métodos.*

*Finalmente somos conscientes de que en un trabajo de estas características es inevitable la aparición de erratas o de falta de precisión que iremos corrigiendo en revisiones posteriores.*

Pedro Galán del Sastre
Ramón J. Zoido
Mayo 2014

# Índice general

**1. Las Diferencias Finitas. Aproximación de las derivadas por diferencias 1**
1.1. Diferencias finitas entre los valores de una función. Operadores . . . . . . . . 1
1.2. Aproximación de derivadas por diferencias finitas . . . . . . . . . . . . . . . . 4
1.3. Resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales . . . . . . 7
1.4. Ecuaciones de 2º orden con valores de la solución en los extremos . . . . . . 9
1.5. Ecuaciones de 2º orden con valores de la derivada en los extremos . . . . . . 12
1.6. La ecuación $y''(x) = f(x)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16
1.7. Ecuaciones de 4º orden. La ecuación $y^{iv}(x) = f(x)$ . . . . . . . . . . . . . . 24

**2. Solicitaciones segmentariamente continuas con saltos finitos 31**
2.1. La flexión simple en vigas rectas de rigidez constante . . . . . . . . . . . . 31
2.2. Las leyes de cargas $w(x)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34
2.3. Condiciones de contorno. Aproximación de las condiciones de contorno en ausencia de cargas concentradas y momentos aislados . . . . . . . . . . . . . 34
2.4. Métodos de una etapa. Ejemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36
2.4.1. Ménsula empotrada en su extremo izquierdo. . . . . . . . . . . . . . . 37
2.4.2. Ménsula empotrada en su extremo derecho . . . . . . . . . . . . . . . 40
2.4.3. Viga doblemente apoyada . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44
2.4.4. Viga empotrada-apoyada . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
2.4.5. Viga apoyada-empotrada . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51
2.4.6. Viga doblemente empotrada . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
2.5. Los métodos de dos etapas en ausencia de cargas y momentos aislados. Ejemplos 58
2.5.1. Ménsula empotrada en su extremo derecho . . . . . . . . . . . . . . . 60
2.5.2. Viga doblemente apoyada . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62
2.5.3. Viga apoyada-empotrada . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65
2.5.4. Viga doblemente empotrada . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67

**3. Introducción de las cargas concentradas y los momentos de flexión aislados 71**
3.1. Acerca de las cargas concentradas y los momentos de flexión aislados . . . . 71
3.2. Las condiciones de conjugación de la unión rígida . . . . . . . . . . . . . . 73
3.3. Una precisión acerca de los signos implícitos en el análisis . . . . . . . . . . 77
3.4. Presencia en los extremos de cargas y momentos aislados . . . . . . . . . . 78
3.5. Reconstrucción de los esfuerzos de corte y de los giros de las secciones . . . . 81
3.6. Métodos en dos etapas. Ejemplos de aplicación . . . . . . . . . . . . . . . . 85
3.6.1. Ménsula empotrada en su extremo izquierdo . . . . . . . . . . . . . . 87
3.6.2. Ménsula empotrada en su extremo derecho . . . . . . . . . . . . . . . 90
3.6.3. Viga doblemente apoyada . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 93

3.6.4. Viga empotrada–apoyada . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 96
3.6.5. Viga apoyada–empotrada . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99
3.6.6. Viga doblemente empotrada . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 102

**4. Extensión a las vigas de varios tramos** **105**
4.1. Extensión a las vigas de varios tramos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 105
4.1.1. Viga empotrada en su extremo izquierdo con un apoyo rígido interior 106
4.1.2. Viga apoyada-empotrada con un apoyo rígido interior . . . . . . . . . 110
4.1.3. Viga doblemente empotrada con tres apoyos rígidos interiores . . . . 114
4.2. Modelos complementarios para los voladizos en vigas . . . . . . . . . . . . . 118
4.2.1. Viga apoyada-libre . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 119
4.2.2. Viga libre-apoyada . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 123
4.2.3. Viga libre-libre . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 127

**5. Extensión a las vigas compuestas** **131**
5.1. Viga apoyada-empotrada con una rótula interior . . . . . . . . . . . . . . . . 134
5.2. Viga compuesta apoyada-empotrada con un apoyo rígido . . . . . . . . . . . 138
5.3. Viga doblemente empotrada con dos apoyos rígidos interiores . . . . . . . . . 142

**6. Resolución matricial del sistema de diferencias finitas** **147**
6.1. Incluyendo apoyos rígidos interiores . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 149
6.2. Incluyendo rótulas interiores . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 150

# 1 Las Diferencias Finitas. Aproximación de las derivadas por diferencias

## 1.1. Diferencias finitas entre los valores de una función. Operadores

Una forma de discretizar de manera uniforme una variable real continua $x$ es considerar los valores $x_i = x_0 + ih$, con $i \in \mathbb{Z}$, a partir de un cierto valor $x_0$. De esta manera definimos una red unidimensional uniforme de paso $h$ constante, $R_h^1$, formada por los puntos $x_i$ de la variable $x$, es decir,

$$R_h^1 = \{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}\,.$$

Si consideramos ahora la función real de variable real, continua, $f(x)$ en un intervalo $J = [0, l] \subset \mathbb{R}$ y la variable $x$ discretizada de esta manera, la función restringida en $J$ a los valores sobre esta retícula discreta de puntos $R_h^1[0, l]$ determina una sucesión numérica $\{f_i\}_{0\leq i\leq N}$:

$$\{f_i\}_{0\leq i\leq N} = \{f_0, f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots, f_N\}$$

con $f_i = f(x_i)$, $x_i = ih$ para $0 \leq i \leq N$ y $N = \frac{l}{h}$; que es lo que podemos denominar *proyección* de $f(x)$ sobre la red $R_h^1[0, l]$ (figura 1.1).

Así, la función $f(x) = x^3 - x$ definida y continua en todo $\mathbb{R}$, fijado $x_0 = 0$ y paso $h = 1$, proyecta la sucesión $\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}} = \{\ldots, -6, 0, f_0 = 0, 0, 6, 24, 60, \ldots\}$.

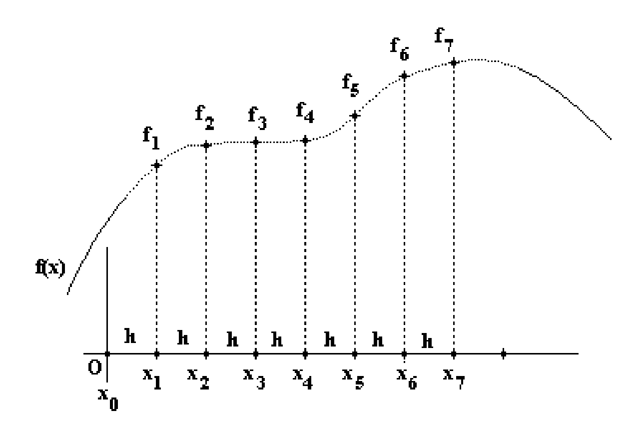



Figura 1.1: Representación discreta de una función.

Definimos ahora, para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$\Delta_p f_i = f_{i+1} - f_i, \tag{1.1}$$

que se lee *diferencia primera progresiva* de $f_i$.

Puede formarse otra sucesión:

$$\{\dots, \Delta_p f_{-1}, \Delta_p f_0, \Delta_p f_1, \Delta_p f_2, \dots, \Delta_p f_N, \}$$

y, en ella puede ser reiterada la definición (1.1) obteniendo:

$$\Delta_p(\Delta_p f_i) = \Delta_p^2 f_i = \Delta_p(f_{i+1} - f_i) = \Delta_p f_{i+1} - \Delta_p f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

o *diferencia segunda* de $f_i$ en sentido *progresivo*. Así puede formarse la sucesión de diferencias segundas:

$$\left\{\dots, \Delta_p^2 f_{-1}, \Delta_p^2 f_0, \Delta_p^2 f_1, \Delta_p^2 f_2, ..., \Delta_p^2 f_i, \Delta_p^2 f_{i+1}, \dots\right\}$$

y, en general la diferencia de orden k:

$$\begin{aligned} \Delta_p^k f_i &= \Delta_p\left(\Delta_p^{k-1} f_i\right) = \dots \\ &= f_{i+k} - \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} f_{i+k-1} + \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} f_{i+k-2} - \dots + (-1)^j \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} f_{i+k-j} + \dots + (-1)^k f_i \end{aligned}$$

que determinará la sucesión $\left\{\dots, \Delta_p^k f_{-1}, \Delta_p^k f_0, \Delta_p^k f_1, \Delta_p^k f_2, \dots, \Delta_p^k f_i, \Delta_p^k f_{i+1}, \dots\right\}$.

En determinadas aplicaciones aparecen problemas regidos por *ecuaciones en diferencias finitas de orden* $n$ con condiciones iniciales y/o de contorno. Las ecuaciones lineales con coeficientes constantes tienen un tratamiento similar al de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

En (1.1) queda implícitamente definido el operador $\Delta_p$ como un operador lineal llamado *operador en diferencias progresivas*. Análogamente podemos definir las *diferencias regresivas* en la sucesión $\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ por

$$\Delta_r f_i = f_i - f_{i-1},$$

y, asimismo establecer las *diferencias medias o centrales*:

$$\Delta_m f_i = \frac{1}{2}\left(\Delta_p f_i + \Delta_r f_i\right) = \frac{1}{2}\left(f_{i+1} - f_{i-1}\right).$$

Pueden definirse otros operadores sobre la sucesión $\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Siendo $I$ el operador identidad, $If_i = f_i$; el de *traslación* $T$ se define por $Tf_i = f_{i+1}$ y su inverso $T^{-1}f_i = f_{i-1}$; ambos nos permiten ya establecer algunas relaciones entre ellos:

$$\begin{aligned} \Delta_p f_i &= f_{i+1} - f_i = Tf_i - f_i = (T - I) f_i, \\ \Delta_r f_i &= f_i - f_{i-1} = f_i - T^{-1} f_i = \left(I - T^{-1}\right) f_i, \end{aligned}$$

por lo que podemos escribir, por ejemplo, $\Delta_p = T - I$ o bien $\Delta_r = I - T^{-1}$.

Definidas la suma y la composición de operadores

$$\begin{aligned} (O_1 + O_2) f &= O_1 f + O_2 f, \\ (O_1 \circ O_2) f &= O_1 (O_2 f), \end{aligned}$$

y definido el producto escalar de un número $\lambda \in \mathbb{R}$ por un operador:

$$(\lambda O) f = \lambda (Of),$$

resultan inmediatas las siguientes relaciones entre los operadores $T, T^{-1}, \Delta_p, \Delta_r$:

$$\begin{array}{ll} \Delta_p = T - I, & T = I + \Delta_p, \\ \Delta_r = I - T^{-1}, & T^{-1} = I - \Delta_r, \\ T \circ \Delta_r = T - I = \Delta_p, & T^{-1} \circ \Delta_p = \Delta_r. \end{array}$$

Estos operadores satisfacen las leyes conmutativa y asociativa ordinarias para la suma y el producto siendo, además, el producto distributivo respecto de la suma. Sin entrar en su estructura y utilidad baste decir que careciendo de sentido independiente de la función que debe de ser colocada a su derecha, pueden, no obstante, ser tratados como cantidades algebraicas y formar polinomios que constituyen, a su vez, operadores más complejos. En nuestro contexto, estos operadores pueden ser relacionados con el operador derivada:

$$D^n f(x) = f^{(n)}(x)$$

para funcionas analíticas (de variable real) $f(x)$ a través de la fórmula de Taylor:

$$\begin{aligned} Tf(x) = f(x+h) &= f(x) + \frac{h}{1!} Df(x) + \frac{h^2}{2!} D^2 f(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} D^n f(x) + \dots \\ &= \left( I + \frac{h}{1!} D + \frac{h^2}{2!} D^2 + \cdots + \frac{h^n}{n!} D^n + \dots \right) f(x) = e^{hD} f(x) \end{aligned}$$

por lo que:

$$I + \Delta_p = T = e^{hD},$$

y por lo tanto:

$$D = \frac{1}{h} \ln \circ T = \frac{1}{h} \ln (I + \Delta_p).$$

Podemos extender los procedimientos de proyección sobre redes uniformes discretas a las funciones $f(x)$ segmentariamente continuas en el intervalo $J = [0, l] \subset \mathbb{R}$, con un número finito de discontinuidades de primera especie o de "salto finito" en $J$. Por el momento, en los nodos $x = x_i$ de la proyección de $f(x)$ que coincidan con discontinuidades de la función convendremos en que eventualmente la función adopta el valor promedio o, en general, podemos considerar por definición que la proyección de la función sobre la red es de la forma:

$$f(x_i) = f_i = \frac{1}{2} \left( f\left(x_i^-\right) + f\left(x_i^+\right) \right),$$

siendo $x_i^-$ y $x_i^+$ el límite de la función $f$ en $x_i$ por la izquierda y derecha respectivamente, lo que equivale a substituirla por una función continua mejor o peor aproximada en función del paso $h$ de $R_h^1$.

## 1.2. Aproximación de derivadas por diferencias finitas

Para una discretización de los valores de la variable $x$: $x_i \in R_h^1[0,l]$, con $x_i = 0 + ih$, $i \in K = \mathbb{Z} \cap [0,N]$ y $N = \frac{l}{h}$, se trata ahora de aproximar $y^{(k)}(x_i)$, $k = 1,2,3,\ldots,n$, de una función $y(x)$ por diferencias entre los valores de $\{y_i\}_{i\in K} = \{y(x_i)\}_{i\in K}$ conociendo cualitativamente el error que dicha aproximación comporta y que será el *error de discretización*. Este error será normalmente puesto de manifiesto por una comparación con el desarrollo en serie de Taylor de la función en los entornos de $x_i$ por lo que, en lo que sigue, convenimos en suponer la suficiente derivación sucesiva de la función $y(x)$ así como la continuidad de estas derivadas. Para poner de manifiesto este error se puede utilizar el llamado término complementario de Lagrange. Otras veces se señalará simplemente el orden de aproximación con la notación $O(h^r)$.

En general la notación $O(x^r)$ denota una función en la variable $x$, así, cuando se escribe que la función $f(x) = O(x^r)$, por definición, la función $f$ verifica que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^r} = C \in \mathbb{R}.$$

Es muy común utilizar el término complementario de Lagrange junto con el polinomio de Taylor para expresar cualquier función analítica como

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1} \\ &= T_n(f,x;h) + R_n(f,x;h), \end{aligned}$$

donde $\theta \in (0,1)$. Alternativamente, podemos expresar

$$f(x+h) = T_n(f,x;h) + O\left(h^{n+1}\right)$$

puesto que

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_n(f,x;h)}{h^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}.$$

Las aproximaciones en diferencias de las derivadas no deben de ser vistas fuera del contexto del problema numérico específico a resolver puesto que cada problema considerará un error admisible del que no sólo forma parte el de discretización. Con vistas a aproximar de una forma general soluciones de ecuaciones diferenciales lineales con condiciones de contorno, dispondremos aquí básicamente de aproximaciones en diferencias centrales de las correspondientes derivadas con órdenes de aproximación $O(h^2)$. Posteriormente realizaremos algunas correcciones propias del problema que nos ocupa.

Si en la expresión $y' = y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ y para un valor $\Delta x = h$ substituimos $y_i' = y'(x_i)$ por $\frac{\Delta_p y_i}{\Delta x}$ o bien por $\frac{\Delta_r y_i}{\Delta x}$, obtendremos

$$y_i' = y'(x_i) \simeq \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

o bien

$$y_i' = y'(x_i) \simeq \frac{y_i - y_{i-1}}{h},$$

consecuencia de haber aproximado, para un cierto paso de red $h$ fijo, la derivada por el cociente finito con diferencias progresivas o regresivas respectivamente. Ambas son aproximaciones $O(h)$ ya que escribiendo el desarrollo de Taylor en el entorno de $x_i$:

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2}y''_i + \frac{h^3}{3!}y'''_i + \frac{h^4}{4!}y^{iv}_i + \frac{h^5}{5!}y^{v}_i + O\left(h^6\right) \tag{1.2}$$

de aquí:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = y'_i + \frac{h}{2}y''_i + \frac{h^2}{3!}y'''_i + \frac{h^3}{4!}y^{iv}_i + \frac{h^4}{5!}y^{v}_i + O\left(h^5\right) \tag{1.3}$$

así que

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h).$$

Así mismo, se puede escribir:

$$y_{i-1} = y_i - hy'_i + \frac{h^2}{2}y''_i - \frac{h^3}{3!}y'''_i + \frac{h^4}{4!}y^{iv}_i - \frac{h^5}{5!}y^{v}_i + O\left(h^6\right) \tag{1.4}$$

de donde:

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} = y'_i - \frac{h}{2}y''_i + \frac{h^2}{3!}y'''_i - \frac{h^3}{4!}y^{iv}_i + \frac{h^4}{5!}y^{v}_i + O\left(h^5\right) \tag{1.5}$$

así que

$$y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + O(h).$$

Se mejora substancialmente la aproximación hasta $O(h^2)$ sumando (1.3) y (1.5), obteniendo

$$\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = y'_i + \frac{h^2}{3!}y'''_i + \frac{h^4}{5!}y^{v}_i + O\left(h^6\right) \tag{1.6}$$

así que

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O\left(h^2\right).$$

Esta aproximación por cociente por diferencias medias o centrales, va a constituir nuestra aproximación tipo $O(h^2)$ de la derivada primera.

Si en vez de sumar, restamos (1.3) y (1.5) obtenemos

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h} = hy''_i + 2\frac{h^3}{4!}y^{iv}_i + O\left(h^5\right)$$

así que:

$$y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O\left(h^2\right),$$

obteniendo la aproximación $O(h^2)$ para $y''_i$.

Para obtener una aproximación del mismo orden en la siguiente derivada deberemos considerar los desarrollos:

$$y_{i+2} = y_i + 2hy'_i + \frac{2^2h^2}{2}y''_i + \frac{2^3h^3}{3!}y'''_i + \frac{2^4h^4}{4!}y^{iv}_i + \frac{2^5h^5}{5!}y^{v}_i + \frac{2^6h^6}{6!}y^{vi}_i + O\left(h^7\right) \tag{1.7}$$

y

$$y_{i-2} = y_i - 2hy_i' + \frac{2^2h^2}{2}y_i'' - \frac{2^3h^3}{3!}y_i''' + \frac{2^4h^4}{4!}y_i^{iv} - \frac{2^5h^5}{5!}y_i^{v} + \frac{2^6h^6}{6!}y_i^{vi} + O\left(h^7\right) \qquad (1.8)$$

y restando ambas expresiones

$$y_{i+2} - y_{i-2} = 4hy_i' + 2\frac{2^3h^3}{3!}y_i''' + 2\frac{2^5h^5}{5!}y_i^{v} + O\left(h^7\right) \qquad (1.9)$$

De (1.6) podemos obtener:

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2hy_i' + 2\frac{h^3}{3!}y_i''' + 2\frac{h^5}{5!}y_i^{v} + O\left(h^7\right) \qquad (1.10)$$

y, restando finalmente de (1.9) la ecuación (1.10) multiplicada por dos, obtenemos:

$$y_{i+2} - y_{i-2} - 2\left(y_{i+1} - y_{i-1}\right) = 2h^3y_i''' + \frac{1}{2}h^5y_i^{v} + O\left(h^7\right)$$

que puede escribirse como

$$\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2h^3} = y_i''' + \frac{1}{4}h^2y_i^{v} + O\left(h^4\right)$$

así que

$$y_i''' = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2h^3} + O\left(h^2\right),$$

obteniendo la aproximación $O\left(h^2\right)$ para la tercera derivada.

Sumando ahora (1.7) y (1.8):

$$y_{i+2} + y_{i-2} = 2y_i + 4h^2y_i'' + 2\frac{2^4h^4}{4!}y_i^{iv} + 2\frac{2^6h^6}{6!}y_i^{vi} + O\left(h^8\right) \qquad (1.11)$$

por otra parte la suma de (1.2) y (1.4) es:

$$y_{i+1} + y_{i-1} = 2y_i + h^2y_i'' + 2\frac{h^4}{4!}y_i^{iv} + 2\frac{h^6}{6!}y_i^{vi} + O\left(h^8\right) \qquad (1.12)$$

para eliminar $y_i''$ entre ambas expresiones basta ahora restar de (1.11) la ecuación (1.12) multiplicada por cuatro. Se obtiene:

$$y_{i+2} + y_{i-2} - 4\left(y_{i+1} + y_{i-1}\right) = -6y_i + h^4y_i^{iv} + \frac{1}{6}h^6y_i^{vi} + O\left(h^8\right)$$

y de aquí:

$$\frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{h^4} = y_i^{iv} + \frac{1}{6}h^2y_i^{vi} + O\left(h^4\right)$$

por lo que podemos escribir

$$y_i^{iv} = \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{h^4} + O\left(h^2\right),$$

obteniendo la aproximación $O\left(h^2\right)$ para la derivada cuarta.

## 1.3. Resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con condiciones en los extremos por aproximación en diferencias finitas

Aunque no supone una restricción al método, nos referiremos a ecuaciones lineales de 4º orden con coeficientes constantes, es decir, de la forma:

$$a_4 y^{iv}(x) + a_3 y'''(x) + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \tag{1.13}$$

con $a_j \in \mathbb{R}$, $f \in C^0([0,l])$ y condiciones suficientes en los extremos del intervalo $[0,l]$ para definir en él la solución particular buscada.

Elegido un cierto número natural $N$, se discretizan los valores de la variable $x$ obteniendo la red unidimensional de paso $h = \frac{l}{N}$ representada por el conjunto de puntos de $R_h^1[0,l]$: $x_i = 0 + ih$ , $i \in \mathbb{Z} \cap [0,N]$, todos ellos pertenecientes al intervalo $[0,l]$.

En lo que sigue, a los valores que obtendremos mediante la correspondiente aproximación en los puntos $x_i$ los escribiremos mediante $y_i, y_i', y_i'', y_i'''$ e $y_i^{iv}$, es decir, $y_i \simeq y(x_i)$, $y_i' \simeq y'(x_i)$, etc... (a diferencia de la § 1.2, donde esta notación la utilizábamos para los valores exactos de la función $y$, así como sus derivadas, en los nodos $x_i$)

Se procede entonces a substituir en la ecuación de campo (1.13) las derivadas de los diferentes órdenes por sus aproximaciones en términos de diferencias entre los valores de $R_h^1[0,l]$. Utilizaremos las aproximaciones centrales $O(h^2)$ obtenidas anteriormente:

$$\begin{aligned} y_i' &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \\ y_i'' &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \\ y_i''' &= \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2h^3} \\ y_i^{iv} &= \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{h^4} \end{aligned} \tag{1.14}$$

cuyos errores de discretización individuales han sido ya expresados.

Se forma así un *esquema* en diferencias que relaciona los distintos puntos de $[0,l]$ que serán los puntos interiores que deben verificar la ecuación de campo. La ecuación diferencial queda aproximada en cada uno de estos nodos de una forma genérica por:

$$\alpha_2(h)\, y_{i-2} + \alpha_1(h)\, y_{i-1} + \alpha_0(h)\, y_i + \beta_1(h)\, y_{i+1} + \beta_2(h)\, y_{i+2} = f_i = f(x_i)$$

obteniendo como resultado un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales cuyos coeficientes dependerán del valor de $h$ y por tanto de la elección de $N$. A este conjunto de ecuaciones hay que añadir las condiciones en los extremos en las que, en caso de aparecer derivadas, las aproximaremos utilizando las fórmulas (1.14).

El conjunto total de estas ecuaciones más las condiciones en los extremos debe permitir la obtención de los valores aproximados de $y(x_i)$ de la solución buscada en los puntos de $[0,l]$ incluidos, en su caso, los extremos. El sistema de ecuaciones deberá ser, por lo tanto, un sistema compatible determinado que nos permita la obtención de la solución proyectada sobre

la red unidimensional uniforme definida para $h$. La utilización de esquemas de aproximación *consistentes* y *estables* nos permitirá que para valores de $h$ progresivamente menores obtengamos sistemas con mayor número de ecuaciones que proporcionan una mejor aproximación discreta a la solución deseada.

El procedimiento se utiliza igualmente en el caso de ecuaciones lineales de coeficientes variables, de la forma

$$a_4(x)\, y^{iv}(x) + a_3(x)\, y'''(x) + a_2(x)\, y''(x) + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = f(x)$$

con $a_j, f \in C([0,l])$. En este caso los coeficientes $\alpha(h)$ y $\beta(h)$ de cada ecuación algebraica no permanecen invariables.

Por otra parte, hay diferentes formas de definir la proyección sobre la red discreta de la función $f(x)$ que aparece en el segundo miembro de la ecuación de campo de manera que no se limite a las funciones continuas y que abarque por ejemplo a las funciones integrables. Pueden ser consideradas en la ecuación diferencial funciones $f(x)$ segmentariamente continuas en $[0,l]$ con un número finito de discontinuidades de salto finito en dicho intervalo. Como ya se ha anotado en § 1.1, para obtener la proyección de la función sobre la red bastará considerar los valores promedios de $f(x)$:

$$f_i = f(x_i) = \frac{1}{2}\left(f\left(x_i^-\right) + f\left(x_i^+\right)\right)$$

Finalmente puede establecerse, con mínimas restricciones, una serie de puntos interiores en el intervalo y trabajar de la misma forma obteniendo un sistema de ecuaciones algebraicas con un paso de red variable $h$ en cada ecuación; es decir: trabajar sobre redes no uniformes. Como se ve, independientemente del grado de aproximación obtenido, el método de aproximación por diferencias finitas puede ser aplicado con una gran generalidad.

Obtenido el esquema en diferencias que aproxima la ecuación diferencial, éste debe ser consistente en el sentido de que el error sea un infinitésimo con $h$. Para nosotros será suficiente precisar el orden de aproximación general que será $O(h^2)$. No obstante, utilizaremos también el término complementario de Lagrange, para realizar algunos ajustes sencillos. Por otro lado, la diferencia entre los valores de la solución y la aproximada obtenida por diferencias será generalmente distinta en cada uno de los puntos por lo que hay que introducir una medida del orden de aproximación logrado. Si esta medida tiende a cero con $h$ la aproximación por diferencias convergerá a la solución y el esquema será estable.

Nuestro interés es el de proporcionar una descripción puramente informativa de los métodos en diferencias con un carácter esencialmente práctico. El problema que nos va a ocupar es del análisis de la flexión simple en barras rectas de inercia constante que tiene peculiaridades propias. Con las hipótesis que se describirán, estos problemas tienen garantizada la existencia y unicidad de la solución de los problemas de contorno que de ellas se deducen. Asimismo, los esquemas que formaremos son consistentes y estables con la convergencia asegurada cuando $h \to 0$.

Obtenidos los valores discretos en los puntos de la red establecida se puede tratar de reconstruir de forma aproximada la solución continua lo que pone en relación estos problemas con los de interpolación. En los problemas aquí presentados cuando se pretenda presentar una gráfica de la solución aproximada nos limitaremos a trazar una poligonal asociada al espectro de las soluciones discretas.

## 1.4. Ecuaciones de 2º orden. Caso en el que se conocen los valores de la solución en los extremos del intervalo

Se trata de obtener una aproximación de la solución particular en $[0, l]$ de la ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden cuyos coeficientes son funciones reales de variable real, en general continuas

$$a_2(x)\, y''(x) + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = f(x),$$

con $a_j, f \in C([0, l])$ y $a_2(x) \neq 0$ para todo $x \in [0, l]$, que satisfacen las condiciones de extremo $y(0) = A$, $y(l) = B$, teniendo garantizada solución única.

Elegido $N$ obtendremos el paso $h = \frac{l}{N}$ y la red de puntos $R_h^1[0, l]$: es decir, $x_i = 0 + ih$, $i \in \mathbb{Z} \cap [0, N]$. Son conocidos los valores de la solución para los índices $i = 0$ e $i = N$, es decir, $y_0 = A$ e $y_N = B$. Teniendo en cuenta las fórmulas (1.14), la ecuación de campo quedará aproximada para cada $x_i$ por:

$$a_2(x_i)\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + a_1(x_i)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + a_0(x_i)y_i = f_i = f(x_i).$$

Con la notación $a_2(x_i) = a_{2i}$, $a_1(x_i) = a_{1i}$, $a_0(x_i) = a_{0i}$, puede escribirse para cada punto de la red interior al intervalo la ecuación, $0 < i < N$,

$$(2a_{2i} - ha_{1i})y_{i-1} + 2(h^2 a_{0i} - 2a_{2i})y_i + (2a_{2i} + ha_{1i})y_{i+1} = 2h^2 f_i,$$

y las condiciones $y(0) = A$, $y(l) = B$ ($y_0 = A$, $y_N = B$) deberán determinar un sistema compatible determinado de $N - 1$ ecuaciones. Las matrices de coeficientes de los sistemas algebraicos resultantes son matrices *banda* características de estos sistemas más significativas y notorias cuando la red es uniforme.

El error debido a la discretización puede venir expresado a través de los términos complementarios de Lagrange en función de ciertos valores de las derivadas tercera y cuarta en el entorno de cada punto de la red:

$$-\frac{1}{6}h^2\left(\frac{1}{2}a_{2i}y^{iv}(x_i + \alpha h) + a_{1i}y'''(x_i + \beta h)\right),$$

con $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

Si la ecuación es de coeficientes constantes, los coeficientes de la ecuación algebraica aproximada se conservan lo que simplifica la construcción del sistema algebraico. Si existen puntos interiores de la red en la que $f(x)$ tenga una discontinuidad de primera especie bastará, como se ha dicho, con tomar el valor promedio para evaluar $f_i$.

**Ejemplo 1.** Consideremos la solución $y(x)$ en $[0, 3]$ con $y(0) = 0$, $y(3) = 0$ de la ecuación

$$y''(x) - y'(x) = f(x)$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, 1.5], \\ -1, & \text{si } x \in (1.5, 3], \end{cases}$$

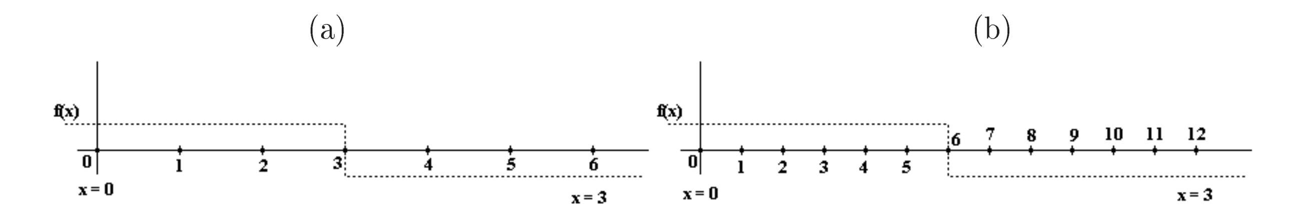



Figura 1.2: Función $f(x)$ y discretización del intervalo $(0, 3)$ para (a) $h = 1$ y (b) $h = 0.5$.

Procedemos a dividir este intervalo en $N$ partes iguales. Aquí se ha comenzado por establecer $N = 6$ definiendo una red de paso $h = 0.5$, con cinco puntos interiores (figura 1.2(a)).

Para cada uno de los puntos $x_i \in [0, 3]$, la ecuación diferencial de campo quedará aproximada por

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = f_i \tag{1.15}$$

donde $f_i = \frac{1}{2}\left(f\left(x_i^-\right) + f\left(x_i^+\right)\right)$. Es decir,

$$5y_{i-1} - 8y_i + 3y_{i+1} = f_i,$$

ecuación de aplicación sistemática para los cinco puntos interiores del intervalo. Teniendo en cuenta las condiciones de extremo, nos permiten escribir el sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{array}{rcll} 5y_0 - 8y_1 + 3y_2 & = & 1, & \text{con } y_0 = 0, \\ 5y_1 - 8y_2 + 3y_3 & = & 1, & \\ 5y_2 - 8y_3 + 3y_4 & = & 0, & \\ 5y_3 - 8y_4 + 3y_5 & = & -1, & \\ 5y_4 - 8y_5 + 3y_6 & = & -1, & \text{con } y_6 = 0, \end{array}$$

que de forma matricial se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y cuya solución es:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ -0.2631 \\ -0.3684 \\ -0.2105 \\ 0.0526 \\ 0.1579 \\ 0.0000 \end{pmatrix}$$

Una mejor aproximación la obtendremos disminuyendo el paso $h$ de la red. Así, si establecemos una red con $h = 0.25$ y 11 puntos interiores numerados tal y como muestra la figura 1.2(b), la ecuación (1.15) quedará ahora:

$$18y_{i-1} - 32y_i + 14y_{i+1} = f_i$$

y el sistema de ecuaciones resultantes, teniendo en cuenta las condiciones de extremos, será:

$$\begin{array}{rcll}
18y_0 - 32y_1 + 14y_2 & = & 1, & \text{con } y_0 = 0, \\
18y_1 - 32y_2 + 14y_3 & = & 1, & \\
18y_2 - 32y_3 + 14y_4 & = & 1, & \\
18y_3 - 32y_4 + 14y_5 & = & 1, & \\
18y_4 - 32y_5 + 14y_6 & = & 1, & \\
18y_5 - 32y_6 + 14y_7 & = & 0, & \\
18y_6 - 32y_7 + 14y_8 & = & -1, & \\
18y_7 - 32y_8 + 14y_9 & = & -1, & \\
18y_8 - 32y_9 + 14y_{10} & = & -1, & \\
18y_9 - 32y_{10} + 14y_{11} & = & -1, & \\
18y_{10} - 32y_{11} + 14y_{12} & = & -1, & \text{con } y_{12} = 0,
\end{array}$$

De forma matricial el sistema se puede escribir ahora como:

$$\begin{pmatrix}
-32 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
18 & -32 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 18 & -32 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 18 & -32 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 18 & -32 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -32 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -32 & 14 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -32 & 14 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -32 & 14 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -32 & 14 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -32
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y la solución del sistema es:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0.0000 \\ -0.1464 \\ -0.2632 \\ -0.3420 \\ -0.3719 \\ -0.3389 \\ -0.2250 \\ -0.0786 \\ 0.0382 \\ 0.1170 \\ 0.1469 \\ 0.1139 \\ 0.0000 \end{pmatrix}$$

Las poligonales que aproximan la solución buscada en ambas casos pueden representarse superpuestas como se muestra en la figura 1.3(a) junto con la solución exacta que en este

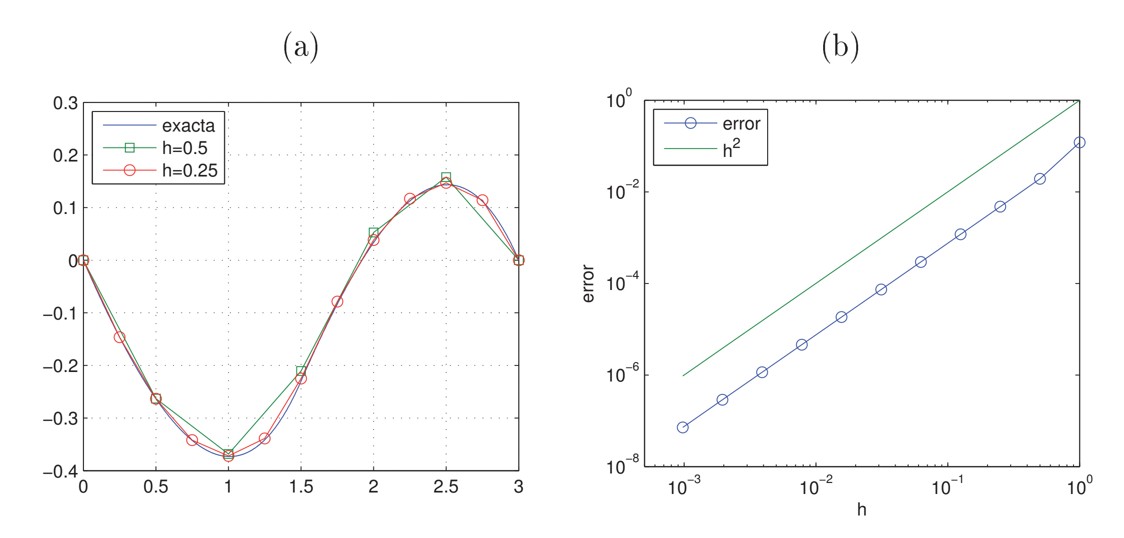



Figura 1.3: (a) Solución analítica junto con la solución numérica para $h = 0.5$ y $h = 0.25$; (b) gráfica de error junto con gráfica de la función $Ch^2$, con $C = 1$.

caso particular puede calcularse mediante los métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales. Se aprecia de forma clara como el error de la solución aproximada es menor cuanto menor es el valor de $h$.

En general podemos escribir el sistema de forma matricial en función del parámetro $h$ como:

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1-\frac{h}{2} & & & & & \\ 1+\frac{h}{2} & -2 & 1-\frac{h}{2} & & & & \\ & 1+\frac{h}{2} & -2 & 1-\frac{h}{2} & & & \\ & & 1+\frac{h}{2} & -2 & 1-\frac{h}{2} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1+\frac{h}{2} & -2 & 1-\frac{h}{2} \\ & & & & & 1+\frac{h}{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

siendo nulos los coeficientes de la matriz que no aparecen representados.

Si resolvemos el problema para distintos valores de $h$, y calculamos el error máximo que se comete en cada punto de $R_h^1\,[0, l]$, podemos representar una gráfica de error, figura 1.3(b), en la que cada círculo representa el error cometido para cada valor de $h$. En la figura se muestra además la función $Ch^2$, con $C = 1$ en este caso, como referencia, que en escala logarítmica viene representada como una recta paralela a la de la función de error, pues tal y como habíamos adelantado el orden de error del método es $O\left(h^2\right)$.

## 1.5. Ecuaciones de 2º orden. Caso de la presencia de derivadas en las condiciones de extremo. Puntos “ficticios”

Si en el intervalo $[0, l]$ las condiciones frontera involucran el valor de la derivada y no el de la función, este último pasa a ser una incógnita más en el sistema de ecuaciones algebraicas

resultante pero en este caso dispondremos de una ecuación adicional en el extremo, lo que nos obligará a considerar formalmente valores de la solución fuera del intervalo que en la práctica supone la extensión de la red unidimensional $R_h^1[0,l]$ a uno o ambos lados del intervalo. A estos puntos exteriores alcanzados por el esquema en diferencias que aproxima la ecuación diferencial se les puede denominar *"puntos ficticios"*. La ecuación adicional que liga los puntos ficticios de la red con los interiores es consecuencia de utilizar en los puntos extremos las correspondientes aproximaciones teniendo en cuenta las fórmulas (1.14).

En el caso de la presencia de derivadas en alguno de los extremos y su substitución por diferencias, además de los errores de discretización de la aproximación deben de considerarse los de aproximación de estas condiciones adicionales. Estos últimos se "propagan" normalmente desde los extremos afectados hacia el interior.

Tomaremos como ejemplo la misma ecuación diferencial del epígrafe anterior con una condición en el extremo derecho que involucre la derivada $y'(x)$.

**Ejemplo 2.** Se trata de obtener ahora una solución aproximada $y(x)$ en $[0,3]$ con $y(0)=1$, $y'(3)=0$ de la ecuación

$$y''(x) - y'(x) = f(x)$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0,1.5]\,, \\ -1, & \text{si } x \in (1.5,3]\,, \end{cases}$$

Elegido el paso de red $h=0.5$, el sistema de ecuaciones algebraicas será ahora:

$$\begin{aligned} 5y_0 - 8y_1 + 3y_2 &= 1, \qquad \text{con } y_0 = 1, \\ 5y_1 - 8y_2 + 3y_3 &= 1, \\ 5y_2 - 8y_3 + 3y_4 &= 0, \\ 5y_3 - 8y_4 + 3y_5 &= -1, \\ 5y_4 - 8y_5 + 3y_6 &= -1, \\ 5y_5 - 8y_6 + 3y_7 &= -1, \end{aligned}$$

con la condición adicional

$$\frac{y_7 - y_5}{2h} = 0,$$

es decir, $y_7 - y_5 = 0$, que involucra un punto ficticio $x_7$ fuera del intervalo a su derecha (figura 1.4(a)) que puede ser evaluado en función del punto interior más próximo al extremo, es decir, en este caso $y_7 = y_5$. El sistema de ecuaciones resultante quedará por lo tanto:

$$\begin{aligned} -8y_1 + 3y_2 &= -4 \\ 5y_1 - 8y_2 + 3y_3 &= 1 \\ 5y_2 - 8y_3 + 3y_4 &= 0 \\ 5y_3 - 8y_4 + 3y_5 &= -1 \\ 5y_4 - 8y_5 + 3y_6 &= -1 \\ 8y_5 - 8y_6 &= -1 \end{aligned}$$

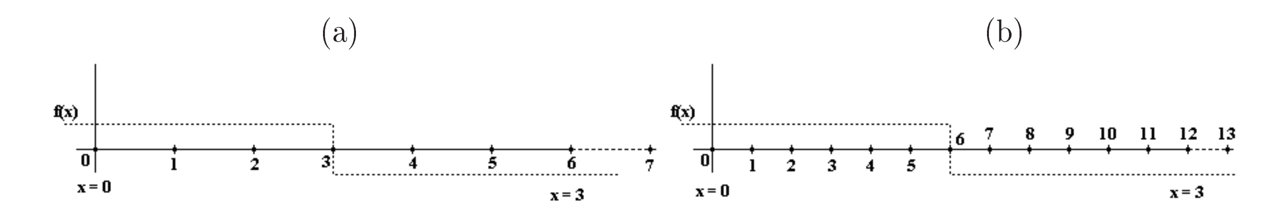



Figura 1.4: Función $f(x)$ y discretización del intervalo $(0,3)$ para (a) $h=1$ y (b) $h=0.5$, incluyendo un nodo ficticio a la derecha del intervalo.

que puede expresarse de forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y cuya solución es:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.7588 \\ 0.6902 \\ 0.9092 \\ 1.2742 \\ 1.5492 \\ 1.6742 \end{pmatrix}.$$

Para una retícula de paso $h = 0.25$, el sistema de ecuaciones algebraicas será ahora:

$$\begin{aligned}
18y_0 - 32y_1 + 14y_2 &= 1, & \text{con } y_0 = 1 \\
18y_1 - 32y_2 + 14y_3 &= 1, \\
18y_2 - 32y_3 + 14y_4 &= 1, \\
18y_3 - 32y_4 + 14y_5 &= 1, \\
18y_4 - 32y_5 + 14y_6 &= 1, \\
18y_5 - 32y_6 + 14y_7 &= 0, \\
18y_6 - 32y_7 + 14y_8 &= -1, \\
18y_7 - 32y_8 + 14y_9 &= -1, \\
18y_8 - 32y_9 + 14y_{10} &= -1, \\
18y_9 - 32y_{10} + 14y_{11} &= -1, \\
18y_{10} - 32y_{11} + 14y_{12} &= -1, \\
18y_{11} - 32y_{12} + 14y_{13} &= -1, & \text{con } y_{13} = y_{11}
\end{aligned}$$

donde ahora el punto ficticio que queda fuera del intervalo será $x_{13}$. Este sistema de 12

ecuaciones expresado de forma matricial será:

$$\begin{pmatrix} -32 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & -32 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & -32 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -32 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -32 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -32 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -32 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -32 & 14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -32 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -32 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -32 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & -32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y cuya solución es:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.8627 \\ 0.7576 \\ 0.6930 \\ 0.6835 \\ 0.7415 \\ 0.8876 \\ 1.0753 \\ 1.2452 \\ 1.3923 \\ 1.5100 \\ 1.5897 \\ 1.6211 \end{pmatrix}$$

Las gráficas de ambas soluciones pueden compararse en la figura 1.5(a).

Matricialmente podemos escribir el sistema resultante para un valor de $h$ arbitrario como

$$AY = F,$$

donde

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1-\frac{h}{2} & & & & & & & \\ 1+\frac{h}{2} & -2 & 1-\frac{h}{2} & & & & & & \\ & 1+\frac{h}{2} & -2 & 1-\frac{h}{2} & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & 1+\frac{h}{2} & -2 & 1-\frac{h}{2} & & & \\ & & & & 1+\frac{h}{2} & -2 & 1-\frac{h}{2} & & \\ & & & & & 1+\frac{h}{2} & -2 & 1-\frac{h}{2} & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & 1+\frac{h}{2} & -2 & 1-\frac{h}{2} \\ & & & & & & & 2 & -2 \end{pmatrix};$$

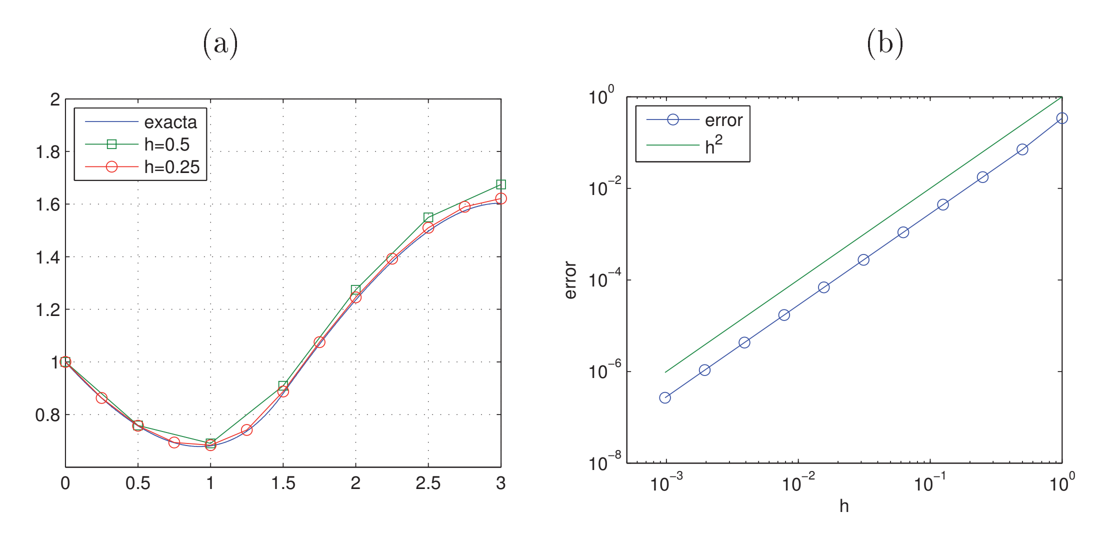



Figura 1.5: (a) Solución analítica junto con la solución numérica para $h = 0.5$ y $h = 0.25$; (b) gráfica de error junto con gráfica de la función $Ch^2$, con $C = 1$.

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N/2-1} \\ y_{N/2} \\ y_{N/2+1} \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix}; \qquad F = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{h^2}\left(1 + \frac{h}{2}\right) \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La gráfica de errores para distintos valores de $h$ (calculados como en el ejemplo anterior) se muestra en la figura 1.5(b).

## 1.6. La ecuación $y''(x) = f(x)$

Particularmente nos interesa abordar mediante diferencias la integración de la ecuación $y''(x) = f(x)$ en el caso de determinadas funciones $f(x)$ segmentariamente de clase cero en $J = [0, l]$, con un número finito de discontinuidades de primera especie que, además de los saltos finitos, presentan un número finito de quebraduras. Además, las condiciones adicionales pueden venir definidas como condiciones de extremo o bien incluir alguna condición en algún punto del interior del intervalo. Aparte de las discontinuidades de la propia función $f(x)$, los puntos en los que esté definido el ángulo de una línea quebrada, por ejemplo, proporcionarán también una cierta contribución al error de discretización local y a estos errores habrá que añadir los de las condiciones adicionales si estas deben ser asimismo aproximadas. En todo caso consideraremos que las anomalías de la función $f(x)$, ya sean discontinuidades o quebraduras coinciden con los nodos de la red discreta sobre la que se proyecta.

En estas condiciones, la aproximación de la ecuación diferencial resulta sencilla. Para cada

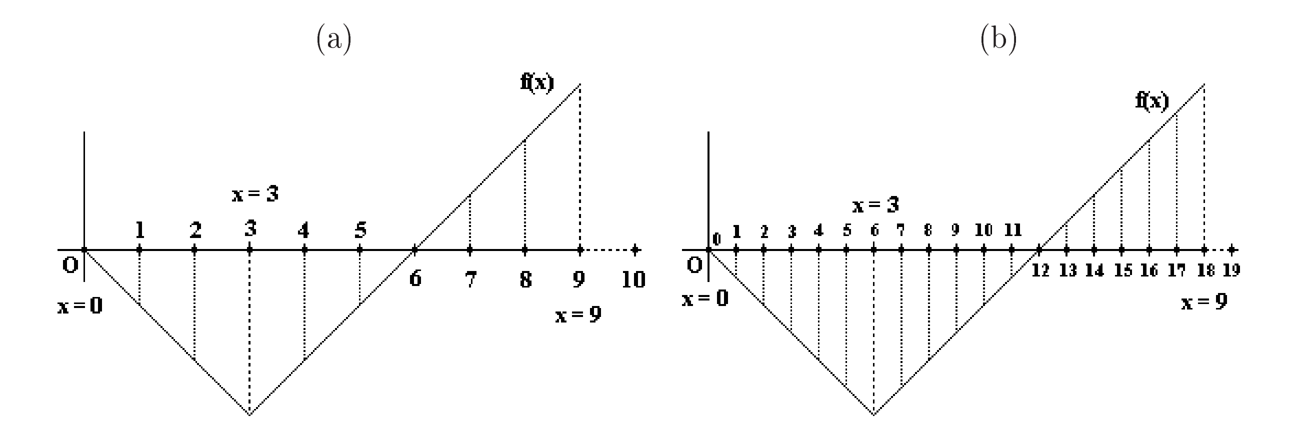



Figura 1.6: Función $f(x)$ y discretización del intervalo $(0, 9)$ para (a) $h = 1$ y (b) $h = 0.5$, incluyendo un nodo ficticio a la derecha del intervalo.

punto $x_i$ de le red unidimensional que cubre el intervalo se deberá verificar simplemente:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f_i$$

y el error de discretización local puede evaluarse por el comportamiento del factor $\frac{1}{12}h^2 y^{iv}(x_i + \theta h)$ con $0 < \theta < 1$, factor que depende del comportamiento de $y^{iv}(x) = f''(x)$ en el entorno de cada nodo $x_i$ por lo que habrá que abordar la función $f(x)$ a la derecha o la izquierda para evitar o bien sus discontinuidades o bien las de su derivada.

**Ejemplo 3.** Se trata de encontrar la solución particular $y(x)$ de clase uno, que en el intervalo $[0, 9]$ satisface la ecuación diferencial $y''(x) = f(x)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [0, 3) \\ x - 6, & \text{si } x \in [3, 9] \end{cases}$$

con las condiciones adicionales $y(3) = 0$ e $y'(9) = 0$.

La función $f(x)$ es una función continua con una quebradura en el punto $x = 3$ en el que su primera derivada es discontinua. La solución buscada es desconocida en el extremo izquierdo del intervalo pero es conocida justamente en el punto $x = 3$.

Si consideramos, por ejemplo, una red de paso $h = 1$, figura 1.6(a), aplicaremos en los puntos interiores la ecuación

$$y_{i-1} + 2y_i + y_{i+1} = f_i,$$

con la condición en el extremo derecho $0 = y'_9 = \dfrac{y_{10} - y_8}{2h}$, de la que se deduce que $y_{10} = y_8$.

Se obtendrá, por lo tanto, el sistema:

$$
\begin{array}{rcllcl}
y_0 - 2y_1 + y_2 & = & -1, & & & \\
y_1 - 2y_2 + y_3 & = & -2, & \text{con } y_3 = 0 & \Longrightarrow & y_1 - 2y_2 = -2, \\
y_2 - 2y_3 + y_4 & = & -3, & \text{con } y_3 = 0 & \Longrightarrow & y_2 + y_4 = -3, \\
y_3 - 2y_4 + y_5 & = & -2, & \text{con } y_3 = 0 & \Longrightarrow & -2y_4 + y_5 = -2, \\
y_4 - 2y_5 + y_6 & = & -1, & & & \\
y_5 - 2y_6 + y_7 & = & 0, & & & \\
y_6 - 2y_7 + y_8 & = & 1, & & & \\
y_7 - 2y_8 + y_9 & = & 2, & & & \\
y_8 - 2y_9 + y_{10} & = & 3, & \text{con } y_{10} = y_8 & \Longrightarrow & 2y_8 - 2y_9 = 3,
\end{array}
$$

sistema compatible determinado que puede expresarse matricialmente como:

$$
\begin{pmatrix}
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

con solución:

$$
\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} -9.5000 \\ -5.0000 \\ -1.5000 \\ 0.0000 \\ -1.5000 \\ -5.0000 \\ -9.5000 \\ -14.0000 \\ -17.5000 \\ -19.0000 \end{pmatrix}
$$

Una red más estrecha sobre el intervalo, figura 1.6(b), nos permite ajustar un poco más el conjunto de soluciones. Utilizando una discretización de paso $h = 0.5$, por ejemplo, el

sistema de 18 ecuaciones es:

$$
\begin{array}{rclcl}
\frac{1}{0.5^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) &=& -0.5, && \\
\frac{1}{0.5^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) &=& -1, && \\
\frac{1}{0.5^2}(y_2 - 2y_3 + y_4) &=& -1.5, && \\
\frac{1}{0.5^2}(y_3 - 2y_4 + y_5) &=& -2, && \\
\frac{1}{0.5^2}(y_4 - 2y_5 + y_6) &=& -2.5, & \text{con } y_6 = 0 \implies & y_4 - 2y_5 = -\frac{2.5}{4}, \\
\frac{1}{0.5^2}(y_5 - 2y_6 + y_7) &=& -3, & \text{con } y_6 = 0 \implies & y_5 + y_7 = -\frac{3}{4}, \\
\frac{1}{0.5^2}(y_6 - 2y_7 + y_8) &=& -2.5, & \text{con } y_6 = 0 \implies & -2y_7 + y_8 = -\frac{2.5}{4}, \\
\frac{1}{0.5^2}(y_7 - 2y_8 + y_9) &=& -2, && \\
\frac{1}{0.5^2}(y_8 - 2y_9 + y_{10}) &=& -1.5, && \\
\frac{1}{0.5^2}(y_9 - 2y_{10} + y_{11}) &=& -1, && \\
\frac{1}{0.5^2}(y_{10} - 2y_{11} + y_{12}) &=& -0.5, && \\
\frac{1}{0.5^2}(y_{11} - 2y_{12} + y_{13}) &=& 0, && \\
\frac{1}{0.5^2}(y_{12} - 2y_{13} + y_{14}) &=& 0.5, && \\
\frac{1}{0.5^2}(y_{13} - 2y_{14} + y_{15}) &=& 1, && \\
\frac{1}{0.5^2}(y_{14} - 2y_{15} + y_{16}) &=& 1.5, && \\
\frac{1}{0.5^2}(y_{15} - 2y_{16} + y_{17}) &=& 2, && \\
\frac{1}{0.5^2}(y_{16} - 2y_{17} + y_{18}) &=& 2.5, && \\
\frac{1}{0.5^2}(y_{17} - 2y_{18} + y_{19}) &=& 3, & \text{con } y_{19} = y_{17} \implies & 2y_{17} - 2y_{18} = \frac{3}{4},
\end{array}
$$

que matricialmente viene expresado mediante:

$$AY = F$$

donde

$$
A = \frac{1}{0.5^2}\begin{pmatrix}
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2
\end{pmatrix},
$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \\ y_{16} \\ y_{17} \\ y_{18} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -1 \\ -1.5 \\ -2 \\ -2.5 \\ -3 \\ -2.5 \\ -2 \\ -1.5 \\ -1 \\ -0.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1.5 \\ 2 \\ 2.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

y que tiene como solución:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \\ y_{16} \\ y_{17} \\ y_{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9.1250 \\ -6.8750 \\ -4.7500 \\ -2.8750 \\ -1.3750 \\ -0.3750 \\ 0.0000 \\ -0.3750 \\ -1.3750 \\ -2.8750 \\ -4.7500 \\ -6.8750 \\ -9.1250 \\ -11.3750 \\ -13.5000 \\ -15.3750 \\ -16.8750 \\ -17.8750 \\ -18.2500 \end{pmatrix}$$

La solución exacta de esta ecuación puede ser obtenida sin ninguna dificultad por métodos continuos viniendo definida por segmentos. En la tabla 1.1 mostramos una comparación entre la solución exacta y la aproximada obtenida para $h = 1$ y $h = 0.5$:

Igual que en ejemplos anteriores, podemos escribir el sistema a resolver para un valor de

| $x_i$ | $h = 1$ | $h = 0.5$ | $y(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0.0 | -9.5000 | -9.1250 | 9.0000 |
| 0.5 | | -6.8750 | 6.7708 |
| 1.0 | -5.0000 | -4.7500 | 4.6667 |
| 1.5 | | -2.8750 | 2.8125 |
| 2.0 | -1.5000 | -1.3750 | 1.3333 |
| 2.5 | | -0.3750 | 0.3541 |
| 3.0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3.5 | | -0.3750 | 0.3541 |
| 4.0 | -1.5000 | -1.3750 | 1.3333 |
| 4.5 | | -2.8750 | 2.8125 |
| 5.0 | -5.0000 | -4.7500 | 4.6667 |
| 5.5 | | -6.8750 | 6.7708 |
| 6.0 | -9.5000 | -9.1250 | 9.0000 |
| 6.5 | | -11.3750 | 11.2291 |
| 7.0 | -14.0000 | -13.5000 | 13.3333 |
| 7.5 | | -15.3750 | 15.1875 |
| 8.0 | -17.5000 | -16.8750 | 16.6667 |
| 8.5 | | -17.8750 | 17.6458 |
| 0.0 | -19.0000 | -18.2500 | 18.0000 |

Tabla 1.1: Comparación entre la solución exacta y la aproximada obtenida para $h = 1$ y $h = 0.5$.

$h$ genérico, en este caso, el sistema matricial a resolver será $AY = F$, con:

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & & & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & -2 & & & & & \\ & & & & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & & & -2 & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & & & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}.$$

En este caso y puesto que la función $f(x)$ está formada por rectas cuya pendiente es constante, los errores se introducen localmente en la quebradura sobre el punto $x = 3$ y en el extremo derecho por la aproximación de la condición frontera (es decir, en las ecuaciones

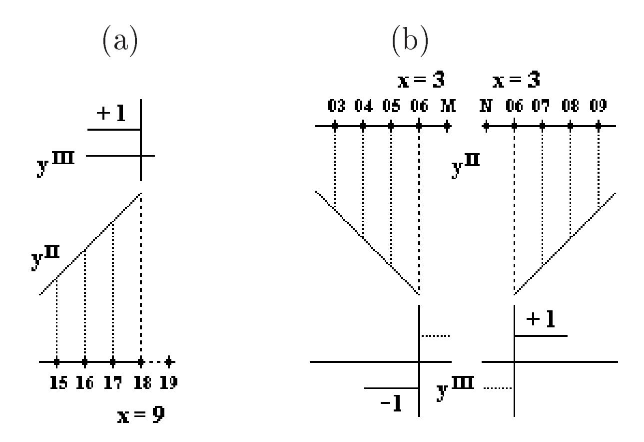



Figura 1.7: Puntos ficticios añadidos para mejorar el error de discretización: (a) a la derecha del intervalo y (b) en $x = 3$.

6ª y 18ª, de extremo, para $h = 0.5$), toda vez que $y^{iv}(x)$ en el resto de los puntos es nula a su derecha e izquierda. Con el fin de ilustrar el comportamiento de los errores y los posibles ajustes y aproximaciones, podemos corregir en este caso los errores cambiando las dos ecuaciones que introducen los errores locales.

Con respecto a la condición del extremo derecho es a la izquierda de este punto $y_{18}(i)$ que tiene sentido físico la ecuación general y la condición adicional de extremo, esto es: la ecuación a aplicar es correctamente (utilizando desarrollos de Taylor en $x_{17}$ y $x_{19}$):

$$y''_{18}(i) = \frac{y_{19} - 2y_{18}(i) + y_{17}}{0.5^2} = 3 \tag{1.16}$$

en tanto la condición de extremo se escribirá:

$$y'_{18}(i) = \frac{y_{19} - y_{17}}{2 \cdot 0.5} - \frac{1}{6}\frac{1}{4}y'''_{18}(i)$$

y puesto que $y'''_{18}(i)$ es constante e igual a 1 determinará $y_{19} = y_{17} + \frac{1}{24}$ (figura 1.7(a)). Este valor llevado a (1.16) nos permite escribir la ecuación:

$$2y_{17} - 2y_{18} = \frac{17}{24},$$

que es la ecuación que debe de sustituir a la 18ª en el sistema.

Si la solución es de clase uno, tenemos garantizada la igualdad de la derivada primera a derecha e izquierda de los puntos interiores. El procedimiento es aplicable para el ajuste de la ecuación 6ª. Abordaremos el punto $x = 3$ por su derecha e izquierda con puntos (ficticios) $M$ y $N$ respectivamente (figura 1.7(b)).

Por la izquierda tendremos:

$$y'_6(i) = \frac{y_M - y_5}{2 \cdot 0.5} - \frac{1}{6}\frac{1}{4}(-1),$$

y además

$$\frac{y_M + y_5}{0.5^2} = -3,$$

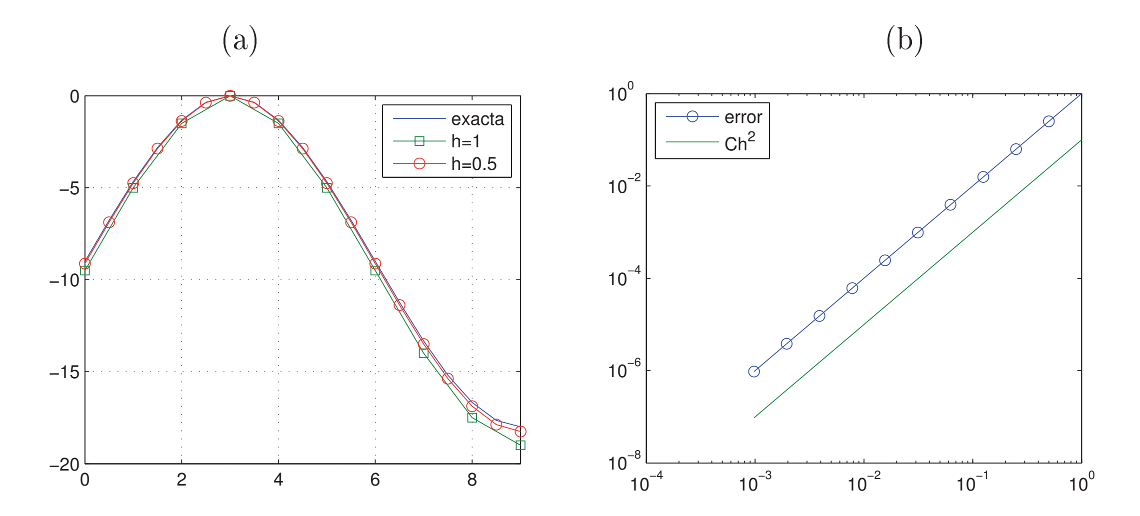



Figura 1.8: (a) Solución analítica junto con la solución numérica para $h = 1$ y $h = 0.5$; (b) gráfica de error junto con gráfica de la función $Ch^2$, con $C = \dfrac{1}{10}$.

de donde

$$y_6'(i) = -2y_5 - \frac{17}{24}.$$

Por la derecha:

$$y_6'(d) = \frac{y_7 - y_N}{2 \cdot 0.5} - \frac{1}{6}\frac{1}{4}(+1),$$

y además

$$\frac{y_7 + y_N}{0.5^2} = -3,$$

de donde

$$y_6'(d) = 2y_7 + \frac{17}{24},$$

y la igualdad de ambas derivadas:

$$-2y_5 - \frac{17}{24} = 2y_7 + \frac{17}{24}$$

nos proporciona la ecuación

$$2y_5 + 2y_7 = -\frac{17}{12}$$

que es la ecuación que debe de sustituir a la 6ª del sistema.

Las soluciones del nuevo sistema de ecuaciones corregidas la 6ª y 18ª coinciden ahora con las exactas.

En general este tipo de ajustes no se realizan o bien directamente no pueden realizarse y se prefiere obtener una mayor aproximación reduciendo el paso $h$ de la red.

En la figura 1.8(a) se representan tres gráficas: la poligonal obtenida para la aproximación sobre red $h = 1$, la obtenida para la aproximación $h = 0.5$ y la solución continua exacta, mientras que en la figura 1.8(b) se muestra la gráfica de errores obtenida al resolver el problema para distintos valores de $h$.

## 1.7. Ecuaciones de 4º orden. La ecuación $y^{iv}(x) = f(x)$

Establecida una discretización de paso $h$ que cubre el intervalo $J = [0, l]$, la substitución de las derivadas por sus aproximaciones en diferencias centrales $O(h^2)$ en la ecuación:

$$a_4(x)\, y^{iv}(x) + a_3(x)\, y'''(x) + a_2(x)\, y''(x) + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = f(x),$$

con $a_j \in C^0(J)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$, dará como resultado una ecuación algebraica para cada punto interior $x_i$:

$$a_{4i}\frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{h^4} + a_{3i}\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2h^3}$$

$$+a_{2i}\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + a_{1i}\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + a_{0i}y_i = f_i.$$

Se deberá disponer, además, de cuatro condiciones adicionales que garanticen la existencia de una solución única del problema. En general, aparecen un par de condiciones en cada extremo, expresadas por ecuaciones que involucran los valores de la solución y de algunas de sus derivadas. Nuestro interés se centra en encontrar soluciones en $[0, l]$ de las ecuaciones más sencillas del tipo $y^{iv}(x) = f(x)$ donde en general la función $f(x)$ tiene, en el intervalo, un número finito de quebraduras o de discontinuidades de primera especie.

En el caso particular que tratamos aquí, discretizada la variable, cada punto del interior deberá satisfacer la ecuación de campo aproximada:

$$\frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{h^4} = f_i,$$

con

$$f_i = \frac{1}{2}\left(f\left(x_i^-\right) + f\left(x_i^+\right)\right)$$

y donde las condiciones en los extremos involucran las derivadas de la función buscada por lo que, independientemente de ser conocidos en la frontera los valores de la solución, existirán puntos exteriores alcanzados por el esquema en diferencias o “puntos ficticios”.

**Ejemplo 4.** Se trata de obtener la solución que satisface en el intervalo $[0, 4]$ la ecuación $y^{iv}(x) = f(x)$, con:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0, 2), \\ x - 4, & \text{si } x \in [2, 4], \end{cases}$$

y las condiciones en los extremos: $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 1$, $y(4) = 0$, $y'(4) = 0$.

Comenzaremos por definir una discretización de paso $h$. Elegimos, por ejemplo, la de paso $h = 0.5$ y numeramos los puntos de la red en el interior tal y como se representa en la figura 1.9(a).

Las condiciones en el extremo izquierdo podrán aproximarse por:

$$\begin{aligned} y_0''' &= \frac{y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2}}{2h^3} = 1 \\ y_0'' &= \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} = 1 \end{aligned}$$

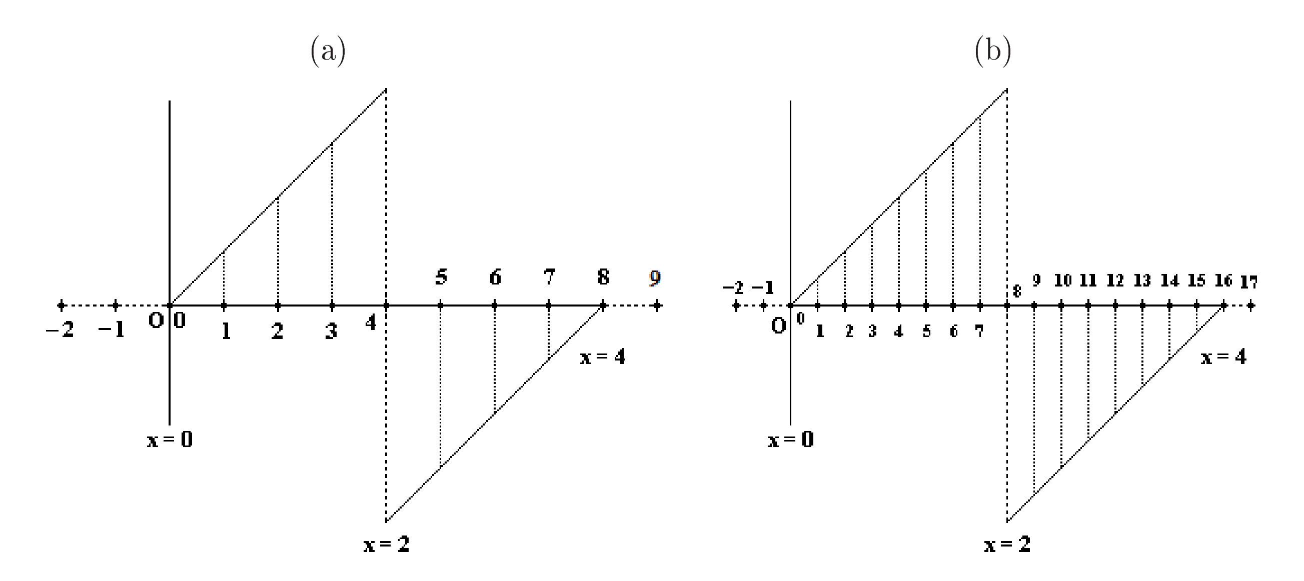



Figura 1.9: Función $f(x)$ y discretización del intervalo $(0,4)$ para (a) $h = 0.5$ y (b) $h = 0.25$, incluyendo un nodo ficticio a la derecha del intervalo.

que nos obligan a extender por la izquierda los puntos ficticios $x_{-1}$ y $x_{-2}$ fuera del intervalo. Los valores de la solución en estos puntos exteriores quedan relacionados con los interiores resolviendo las dos ecuaciones y obteniendo:

$$\begin{aligned}
y_{-1} &= 2y_0 - y_1 + h^2 = 2y_0 - y_1 + \frac{1}{4} \\
y_{-2} &= 2y_{-1} - 2y_1 + y_2 - 2h^3 = 4y_0 - 4y_1 + y_2 + 2h^2 - 2h^3 = 4y_0 - 4y_1 + y_2 + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

y en el extremo derecho, además de $y_8 = 0$, la condición adicional

$$y_8' = \frac{y_9 - y_7}{2h} = 0,$$

permite asignar al punto $x_9$ "ficticio" el valor $y_9 = y_7$.

El sistema de ecuaciones para $h = 0.5$ quedará por lo tanto:

$$\begin{array}{rcll}
\frac{1}{0.5^4}\left(y_{-2} - 4y_{-1} + 6y_0 - 4y_1 + y_2\right) & = & 0, & \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{-2} = 4y_0 - 4y_1 + y_2 + \frac{1}{4}, \\ y_{-1} = 2y_0 - y_1 + \frac{1}{4}, \end{array} \right. \\
\frac{1}{0.5^4}\left(y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3\right) & = & 0.5, & \text{con} \quad y_{-1} = 2y_0 - y_1 + \frac{1}{4} \\
\frac{1}{0.5^4}\left(y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4\right) & = & 1, & \\
\frac{1}{0.5^4}\left(y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5\right) & = & 1.5, & \\
\frac{1}{0.5^4}\left(y_2 - 4y_3 + 6y_4 - 4y_5 + y_6\right) & = & 0, & \\
\frac{1}{0.5^4}\left(y_3 - 4y_4 + 6y_5 - 4y_6 + y_7\right) & = & -1.5, & \\
\frac{1}{0.5^4}\left(y_4 - 4y_5 + 6y_6 - 4y_7 + y_8\right) & = & -1, & \text{con} \quad y_8 = 0 \\
\frac{1}{0.5^4}\left(y_5 - 4y_6 + 6y_7 - 4y_8 + y_9\right) & = & -0.5, & \text{con} \quad y_8 = 0,\ y_9 = y_7
\end{array}$$

que de forma matricial se puede escribir:

$$\frac{1}{0.5^4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1.5 \\ 0 \\ -1.5 \\ -1 \\ -0.5 \end{pmatrix} - \frac{1}{0.5^4}\begin{pmatrix} \frac{1}{4}-4\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y cuya solución es:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44.1250 \\ 35.7500 \\ 27.7500 \\ 20.2812 \\ 13.5625 \\ 7.9062 \\ 3.6250 \\ 0.9375 \\ 0.0000 \end{pmatrix}$$

Estableciendo una red mas fina, con $h = 0.25$, como se representa en la figura 1.9(b), el sistema será ahora:

$$\begin{array}{rcll}
\frac{1}{0.25^4}\left(y_{-2}-4y_{-1}+6y_0-4y_1+y_2\right) & = & 0, & \text{con} \quad \left\{\begin{array}{l} y_{-2}=4y_0-4y_1+y_2+\frac{3}{32}, \\ y_{-1}=2y_0-y_1+\frac{1}{16}, \end{array}\right. \\
\frac{1}{0.25^4}\left(y_{-1}-4y_0+6y_1-4y_2+y_3\right) & = & 0.25, & \text{con} \quad y_{-1}=2y_0-y_1+\frac{1}{16} \\
\frac{1}{0.25^4}\left(y_0-4y_1+6y_2-4y_3+y_4\right) & = & 0.5, & \\
\frac{1}{0.25^4}\left(y_1-4y_2+6y_3-4y_4+y_5\right) & = & 0.75, & \\
\frac{1}{0.25^4}\left(y_2-4y_3+6y_4-4y_5+y_6\right) & = & 1, & \\
\frac{1}{0.25^4}\left(y_3-4y_4+6y_5-4y_6+y_7\right) & = & 1.25, & \\
\frac{1}{0.25^4}\left(y_4-4y_5+6y_6-4y_7+y_8\right) & = & 1.5, & \\
\frac{1}{0.25^4}\left(y_5-4y_6+6y_7-4y_8+y_9\right) & = & 1.75, & \\
\frac{1}{0.25^4}\left(y_6-4y_7+6y_8-4y_9+y_{10}\right) & = & 0, & \\
\frac{1}{0.25^4}\left(y_7-4y_8+6y_9-4y_{10}+y_{11}\right) & = & -1.75, & \\
\frac{1}{0.25^4}\left(y_8-4y_9+6y_{10}-4y_{11}+y_{12}\right) & = & -1.5, & \\
\frac{1}{0.25^4}\left(y_9-4y_{10}+6y_{11}-4y_{12}+y_{13}\right) & = & -1.25, & \\
\frac{1}{0.25^4}\left(y_{10}-4y_{11}+6y_{12}-4y_{13}+y_{14}\right) & = & -1, & \\
\frac{1}{0.25^4}\left(y_{11}-4y_{12}+6y_{13}-4y_{14}+y_{15}\right) & = & -0.75, & \\
\frac{1}{0.25^4}\left(y_{12}-4y_{13}+6y_{14}-4y_{15}+y_{16}\right) & = & -0.5, & \text{con} \quad y_{16}=0 \\
\frac{1}{0.25^4}\left(y_{13}-4y_{14}+6y_{15}-4y_{16}+y_{17}\right) & = & -0.25, & \text{con} \quad y_{16}=0,\ y_{17}=y_{15}
\end{array}$$

que de forma matricial queda

$$AY = F,$$

con:

$$A = \frac{1}{0.25^4}\begin{pmatrix}
2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7
\end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 0.5 \\ 0.75 \\ 1 \\ 1.25 \\ 1.5 \\ 1.75 \\ 0 \\ -1.75 \\ -1.5 \\ -1.25 \\ -1 \\ -0.75 \\ -0.5 \\ -0.25 \end{pmatrix} - \frac{1}{0.25^4}\begin{pmatrix} \frac{3}{32} - 4\frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y cuya solución es:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \\ y_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44.6328 \\ 40.3516 \\ 36.1484 \\ 32.0400 \\ 28.0449 \\ 24.1846 \\ 20.4844 \\ 16.9746 \\ 13.6914 \\ 10.6777 \\ 7.9766 \\ 5.6240 \\ 3.6504 \\ 2.0810 \\ 0.9375 \\ 0.2383 \\ 0.0000 \end{pmatrix}.$$

En general, podemos escribir el sistema para un valor de $h$ genérico de la forma:

$$AY = F,$$

donde en este caso,

$$A = \frac{1}{h^4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & & & & & \\ -2 & 5 & -4 & 1 & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-3} \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix}; \qquad F = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{N-3}) \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix} - \frac{1}{h^4}\begin{pmatrix} -2h^2-2h^3 \\ h^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las gráficas de ambas aproximaciones pueden compararse en la figura 1.10(a) mientras que en la figura 1.10(b) se muestra la gráfica de errores obtenidos para distintos valores de $h$.

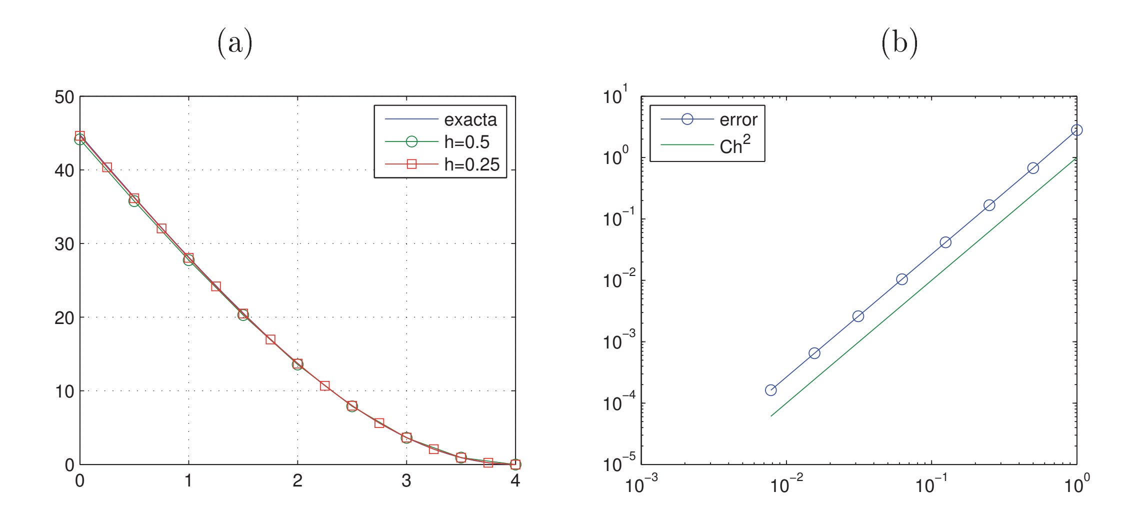
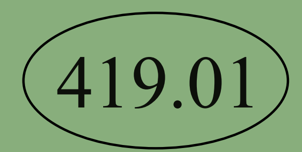



Figura 1.10: (a) Solución analítica junto con la solución numérica para $h = 0.5$ y $h = 0.25$; (b) gráfica de error junto con gráfica de la función $Ch^2$, con $C = 1$.

**CUADERNO**




Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

